M 62 CONCOURS COMMUN MINES.PONTS 1978

OPTION M - 2EME EPREUVE DE MATHEMATIQUES
(remplacement)

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, spécifique aux candidats de l'option M, comporte 5 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

Définitions et notations

1°) Le symbole $\mathbb{N}$ représente l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs.

2°) Pour tout nombre réel x, on désigne par [x] la partie entière de x, et par {x} sa partie fractionnaire, c'est-à-dire $\{x\} = x - [x]$.

3°) Un nombre premier est par définition un entier naturel, strictement supérieur à 1 qui n'admet pas d'autre diviseur que lui-même et l'unité.

. Dans le problème, la lettre p représentera toujours un nombre premier.

. Etant donné un réel x, supérieur ou égal à 2, on pose $P(x) = \{p \mid p \in \mathbb{N}, p \text{ premier}, p \leqslant x\}$ conformément à la convention concernant la lettre p, toute somme du type

$$\sum_{p \in P(x)} f(p) \quad \text{pourra aussi être notée} \quad \sum_{2 \leqslant p \leqslant x} f(p) \quad .$$

4°) Dans l'ensemble des entiers naturels, la relation "k divise n" sera notée $(k \mid n)$. Conformément à cette convention, toute somme du type $\sum_{k \in D(n)} f(k)$, où D(n) représente l'ensemble des diviseurs entiers naturels de l'entier naturel non nul n, pourra aussi être notée $\sum_{k \mid n} f(k)$.

5°) Le symbole Log désigne la fonction logarithme népérien et la lettre e représente la base de cette fonction, c'est-à-dire l'unique réel tel que Log e = 1.

6°) Notation o (petit o). Etant données deux fonctions réelles de la variable réelle, f et g, on dit que "$f = o(g)$ au voisinage de $+\infty$" si et seulement si

"$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists A \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ (x > A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon\, |g(x)|)$".

On rappelle que si g est non nulle au voisinage de $+\infty$, cette condition équivaut aussi à

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad .$$

7°) Le but du problème est l'étude du comportement au voisinage de $+\infty$ de la fonction réelle π définie pour tout réel x, $x \geqslant 2$ par :

$$\pi(x) = \text{Card } P(x) = \sum_{2 \leqslant p \leqslant x} 1 \quad .$$

PARTIE I

Observation

Le résultat de la 1ère question de la partie I n'est utilisé qu'à partir de la 3ème question de la partie III.

I - 1°) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite monotone de réels positifs, et soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels.

.../...

Montrer que pour tout couple d'entiers (M,N) tel que $1 \leqslant M < N$ on a :

$$\left| \sum_{n=M+1}^{N} a_n b_n \right| \leqslant 2 \max \{ a_{M+1} , a_N \} . \max_{M \leqslant n \leqslant N} |s_n|$$

où on a posé :

$s_n = \sum_{m=1}^{n} b_m$. (On pourra remarquer que $b_n = s_n - s_{n-1}$ et exprimer la somme $\sum_{n=M+1}^{N} a_n b_n$ en fonction des a_n et des s_n).

I - 2°) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels et ϕ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continûment dérivable sur l'intervalle $[1,+\infty[$ de $\mathbb{R}$.

On pose pour tout réel x, $x \geqslant 1$ $\quad A(x) = \sum_{n=1}^{[x]} a_n = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} a_n$.

a) Démontrer que pour tout réel x, $x \in [1,+\infty[$, A est intégrable sur le segment $[1,x]$ et on a :

$$\int_1^x \sum_{1 \leqslant n \leqslant u} a_n \phi'(u)\, du = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} a_n \int_n^x \phi'(u)\, du$$

b) En déduire que pour tout réel x, $x \in [1,+\infty[$, on a :

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} a_n \phi(n) = A(x)\, \phi(x) - \int_1^x A(u)\, \phi'(u)\, du$$

c) Application : en considérant la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $(\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = 1)$, démontrer qu'il existe une constante réelle K_1 telle que l'on ait :

$$\forall x \in [1,+\infty[\quad | \operatorname{Log}([x]!) - x \operatorname{Log} x + x | \leqslant K_1 (\operatorname{Log} x) + 1 .$$

I - 3°) a) Démontrer que la suite de nombres réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \operatorname{Log} n$ est convergente, la limite sera notée γ (constante d'Euler).

b) Démontrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^2}\, du$ est convergente et vérifier que $\gamma = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^2}\, du$.

Pour la suite, on pose $I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^2}\, du$ pour tout x réel, $x \geqslant 1$.

c) On définit la fonction réelle U en posant $U(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ pour tout réel x, $x \geqslant 1$.

Démontrer, en utilisant le 2°) b) (avec $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = 1$), qu'il existe une constante réelle K_2 telle que : $\forall x \in [1,+\infty[\quad |U(x) - (\operatorname{Log} x) - \gamma| \leqslant \frac{K_2}{x}$.

d) Démontrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u} I(u)\, du$ est convergente . On pose $\delta = \gamma - 1 + \int_1^{+\infty} \frac{I(u)}{u}\, du$.

Soit V la fonction réelle définie en posant : $V(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \frac{x}{n}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ pour tout réel x, $x \geqslant 1$.

Montrer, en utilisant le 2°) b) (avec $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \frac{1}{n}$), qu'il existe une constante réelle K_3 telle que $\forall x \in [1,+\infty[\quad |V(x) - \frac{1}{2} (\operatorname{Log} x)^2 - \gamma \operatorname{Log} x - \delta| \leqslant \frac{K_3}{x}$.

.../...

PARTIE II

Observation

Le candidat pourra,en première lecture, traiter d'abord la question II - 3°) b) en admettant le résultat de II - 3°) a).

Soit μ la fonction réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} \mu(1) = 1 \\ \mu(n) = (-1)^r \text{ si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ \mu(n) = o \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

μ est appelée fonction de Möbius .

II - 1°) Montrer que pour tout entier naturel n, non nul, $\sum_{k|n} \mu(k)$ est égal à 1 si $n = 1$, à o si $n > 1$.

[Pour $n > 1$, on pourra écrire la décomposition de n en facteurs premiers, sous la forme $n = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_r^{i_r}$ (avec $i_k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k = 1,2,..r$) puis caractériser et dénombrer les diviseurs k de n pour lesquels on a $\mu(k) \neq o$].

II - 2°) Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle $[1,+\infty[\subset \mathbb{R}$.

Pour tout x appartenant à $[1,+\infty[$, on pose $F(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} f(\frac{x}{n})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

a) Vérifier que l'on a $\forall x \in [1,+\infty[\quad f(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \mu(n)\ F(\frac{x}{n})$

b) E désignant le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on appelle Φ l'application de E dans lui-même définie par $\Phi(f) = F$.
Montrer que Φ est un automorphisme de E.
Un couple (f,F) de fonctions réelles définies sur $[1,+\infty[$, tel que $F = \Phi(f)$ est appelé un μ-couple.

II - 3°) a) Pour tout x réel, $x \in [2,+\infty[$, et tout entier naturel p, premier, tel que $p \leqslant x$, on pose $\nu_p(x) = \max \{\nu | \nu \in \mathbb{N}^* | \ p^\nu \leqslant x\}$ et $i_p(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_p(x)} [\frac{x}{p^\nu}]$.

Démontrer que la décomposition de $[x]!$ en facteurs premiers s'écrit :

$$[x]! = \prod_{2 \leqslant p \leqslant x} p^{i_p(x)}$$

(pour tout entier ν, tel que $1 \leqslant \nu \leqslant \nu_p(x)$, on pourra dénombrer les entiers m $2 \leqslant m \leqslant [x]$, dont la composition en facteurs premiers contient p avec un exposant supérieur ou égal à ν).

b) Soit Λ la fonction réelle définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} \Lambda(n) = \text{Log}p & \text{si la décomposition de } n \text{ en facteurs premiers est de la forme} \\ & n = p^\nu \text{ avec } \nu \in \mathbb{N}^* \\ \Lambda(n) = o & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Soit alors Ψ la fonction réelle définie sur $[1,+\infty[$ par $\Psi(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \Lambda(n)$.

Démontrer que $\Phi(\Psi)$ est la fonction telle que :

$$\forall x \in [1,+\infty[\quad \Phi(\Psi)(x) = \text{Log}([x]!) .$$

.../...

PARTIE III

Observation

Le candidat pourra, en première lecture, traiter d'abord la question III-4°) en admettant le résultat de III-3°).

III - 1°) Soit (f,F) un μ-couple, on suppose qu'il existe une constante réelle positive H et une constante réelle β, avec $0 \leqslant \beta < 1$, telles que pour tout $x \in [1,+\infty[$ $|F(x)| \leqslant Hx^{\beta}$

Démontrer que, pour tout réel $x \in [1,+\infty[$ on a $|f(x)| \leqslant \frac{Hx}{1-\beta} - \frac{H\beta x^{\beta}}{1-\beta}$.

(On pourra majorer la somme $\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{n^{\beta}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ au moyen d'une intégrale).

III - 2°)a) Soit (f,F) un μ-couple. On suppose qu'il existe cinq constantes réelles A,B,C,K et β avec $0 \leqslant \beta < 1$ telles que pour tout $x \in [1,+\infty[$.

$$|F(x) - A x \operatorname{Log}^2 x - B x \operatorname{Log} x - C x| \leqslant K x^{\beta} .$$

- Montrer que l'on peut choisir a,b,c, constantes réelles, de façon que, en posant $f_0(x) = f(x) - a x \operatorname{Log} x - b x - c$ pour tout $x \in [1,+\infty[$, et $F_0 = \Phi(f_0)$, il existe une constante réelle positive H telle que l'on ait : $\forall x \in [1,+\infty[$ $|F_0(x)| \leqslant H x^{\beta}$.
- En déduire qu'il existe une constante H_1 telle que :

$$\forall x \in [1,+\infty[\quad |f(x) - 2Ax \operatorname{Log} x| \leqslant H_1 x .$$

b) Application : Ψ désignant la fonction introduite dans le II-3°), démontrer que $\frac{\Psi(x)}{x}$ est bornée quand x décrit $[1,+\infty[$.

III - 3°) On pose pour tout réel $x \in [1,+\infty[$ $M(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \mu(n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

- On admettra dans la suite du problème que $\frac{M(x)}{x}$ est un infiniment petit quand x tend vers $+\infty$.

Ce résultat peut se traduire par :

" $M(x) = o(x)$ au voisinage de $+\infty$ " ;

ou encore par :

$$\lim_{y \to +\infty} \varepsilon(y) = 0 .$$

ε désignant la fonction réelle définie par $\forall y \in [1,+\infty[$ $\varepsilon(y) = \sup_{x \geqslant y} \left| \frac{M(x)}{x} \right|$

a) Soit (f,F) un μ-couple vérifiant les mêmes hypothèses que dans le III-2°) et tel que F soit positive croissante sur $[1,+\infty[$. On veut démontrer que, au voisinage de $+\infty$, on a : $f(x) = 2Ax \operatorname{Log} x + (B - 2A\gamma)x + o(x)$.

On pourra pour cela, en introduisant un réel arbitraire $\eta \in]0,1[$, écrire pour tout réel $x \geqslant \frac{1}{\eta}$

$f_0(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant \eta x} \mu(n) F_0(\frac{x}{n}) + \sum_{\eta x < n \leqslant x} \mu(n) F_0(\frac{x}{n})$ puis majorer séparément les deux sommes.

Pour la seconde, on pourra observer que F_0 est la différence de deux fonctions positives croissantes F_1 et F_2 et majorer les sommes $\sum_{\eta x < n \leqslant x} \mu(n) F_i(\frac{x}{n})$ $(i = 1,2)$ en utilisant le résultat établi en I-1°)

b) Application : montrer que $\Psi(x) = x + o(x)$ au voisinage de $+\infty$.

.../...

II - 4°) a) On pose pour tout réel $x \in [2,+\infty[$ $\theta(x) = \sum_{p \in P(x)} \text{Log}p = \sum_{2 \leqslant p \leqslant x} \text{Log}p$

Ψ désignant la fonction étudiée dans les questions précédentes, démontrer les identités

(i) $\Psi(x) = \sum_{2 \leqslant p \leqslant x} \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant \nu_p(x)} \text{Log}p$ ($\nu_p(x)$ est défini dans le II-3°) a)).

(ii) $\Psi(x) = \sum_{2 \leqslant p \leqslant x} [\frac{\text{Log}x}{\text{Log}p}] \text{Log}p$ ([] désigne toujours la partie entière).

(iii) $\Psi(x) = \sum_{k=1}^{k=[\frac{\text{Log}x}{\text{Log}2}]} \theta(x^{\frac{1}{k}})$

En déduire pour tout réel $x \in [2,+\infty[$ $\theta(x) \leqslant \Psi(x) \leqslant \pi(x) \text{Log}\, x$

(π est la fonction définie dans le préambule : $\pi(x) = \text{Card}\, P(x)$).

b) Pour tout x donné dans $]e,+\infty[$ et tout réel y dans $]1,x[$. Démontrer que :

$\theta(x) \geqslant \pi(x) \text{Log}y - y \text{Log}y$.

c) Soit f la fonction réelle définie par : $f(x) = \frac{x}{\text{Log}^2 x}$.

Démontrer que pour tout $x \in]e,+\infty[$ on a : $1 < f(x) < x$.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{Log}f(x)}{\text{Log}x}$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)\,\text{Log}x}{x}$

d) En utilisant l'inégalité trouvée dans le a) et celle trouvée dans le b) dans laquelle on aura substitué f(x) à y, démontrer que lorsque x tend vers $+\infty$, $\pi(x)$ est équivalent à $\frac{x}{\text{Log}x}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail